Einflussfaktoren auf das Signal-Rausch-Verhältnis bei CCD Aufnahmen

von Joachim Rahm

Beinahe jeder Amateur-Astrofotograf nutzt heutzutage digitale Kameras oder sogar spezielle CCD-Astrokameras. Der vorliegende Artikel soll die wichtigsten Parameter beleuchten, welche entscheidenden Einfluss auf das Signal-Rausch-Verhältnis (SNR) haben. Bei bereits vorhandenem Equipment kann bei Kenntnis dieser Faktoren das Bildergebnis optimiert werden. Idealerweise sollte man die Parameter schon bei der Anschaffung eines Teleskops bzw. Kamera oder der Auswahl eines geeigneten Beobachtungsstandortes berücksichtigen.

Es werden bewusst die mathematischen bzw. physikalischen Zusammenhänge herausgestellt. Der versierte Amateur hat so die Option für seine spezielle Ausstattung die Parameter selbst zu berechnen. Die Berechnungen können jedoch auch bequem auf meiner Webseite [1]. durchgeführt werden.

Signal-Rausch-Verhältnis

Das SNR ist unter bestimmten Voraussetzung nach [2] gegeben durch:

$$SNR = \frac{N_{e^-}^{S} \cdot \sqrt{t}}{\sqrt{N_{e^-}^{S} + k\left(N_{e^-}^{bg} + dc + \frac{\sigma_r^2}{t}\right)}}$$

mit:

$N_{e^-}^{S}$	Anzahl der von der Quelle (Stern) erzeugten Elektronen.
$N_{e^-}^{bg}$	Anzahl der vom Himmelshintergrund (background) erzeugten Elektronen.
k	Anzahl der Pixel, auf welche sich das Beugungsscheibchen des Sternes verteilt.
dc	Dunkelstrom (dark current) der CCD.
σ_r^2	Ausleserauschen (read noise) der CCD-Elektronik.

Die Bedingungen für die Gültigkeit der Formel sind:

- ein im Gesichtsfeld homogener Himmelshintergrund,
- ein hinreichend kalibriertes Bild und
- pixelunabhängiger Dunkelstrom bzw., pixelunabhängiges Ausleserauschen.

Für die Kalkulation des SNR sind folglich die Kenntnis über

- die auf die CCD auftreffende Lichtintensität,
- die Abbildung des Sternes auf den Chip und
- diverse Kameraeigenschaften von Nöten.

Berechnung der Signalstärke in Abhängigkeit der Stern-Magnitude

Sterne kann man näherungsweise als Schwarze Strahler beschreiben, welche in der Regel ein isotropes Strahlungsfeld emittieren. Die Strahlungsintensität im Wellenlängenintervall $[\lambda, \lambda + d\lambda]$ ist durch die Planksche Hohlraumstrahlung gegeben:

$$B_\lambda(T)d\lambda = \frac{2hc^2/\lambda^5}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1} d\lambda$$

Die scheinbare Helligkeit eines Sternes ist das historische Maß für den Strahlungsfluss, welche an die logarithmische Intensitätsempfindlichkeit des menschlichen Auges angepasst ist. Hierbei wurde Wega als Referenz mit der Magnitude Null definiert [3].

$$m_{\lambda_i} = -2.5 \log \frac{f_{\lambda_i}}{f_{0,\lambda_i}}$$

$$\rightarrow$$

$$f_{\lambda_i} = f_{0,\lambda_i} \cdot 10^{-0,4 m_{\lambda_i}}$$

Dabei ist der Strahlungsfluss am Beobachtungsort gegeben mit:

$$f_{0,\lambda_i} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\pi R^2}{r^2} B_\lambda(T)(1-\eta_\lambda)(1-E_\lambda)\, d\lambda$$

Hierin sind:

r	Abstand Beobachtungsort zur Wega
R	Radius der Wega
η_λ	von den Fraunhoferlinien absorbierter Strahlungsanteil
E_λ	Extinktion der Erdatmosphäre

Für die Berechnung der im Pixel erzeugten Elektronen $N_{e^-;0,\lambda_i}$ muss noch

- die lichtsammelnde Fläche des Teleskops A_T,
- Transmission der Optik $T_{T,\lambda}$,
- die spektrale Quanteneffizienz QE_λ der CCD
- und nicht zuletzt die Abbildungseigenschaften der Optik G_λ
- sowie die atmosphärischen Bedingungen berücksichtigt werden.

Weiterhin wird die Anzahl der auftreffenden Lichtquanten aus dem Quotient f_{0,λ_i} und der mittleren Photonenenergie zu $N^S_{ph;0,\lambda_i} = f_{0,\lambda_i} \cdot \frac{\langle \lambda_i \rangle}{hc}$ bestimmt.

Für die Anzahl der erzeugten Elektronen erhält man schließlich:

$$N^S_{e^-;0,\lambda_i} = \frac{\langle \lambda_i \rangle}{hc} \cdot A_T \cdot \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\pi R^2}{r^2} B_\lambda(T)(1-\eta_\lambda)(1-E_\lambda) T_{T,\lambda} QE_\lambda G_\lambda d\lambda$$

Den von den Fraunhoferlinien absorbierten Strahlungsanteil η_λ vernachlässigen wir in unseren weiteren Betrachtung und gehen näherungsweise davon aus, dass die Größen E_λ, $T_{T,\lambda}$ und G_λ im Wellenlängenintervall $[\lambda_1, \lambda_2]$ nur unwesentlich mit λ variieren, so dass diese Parameter vor das Integral gezogen werden können.

$$N^S_{e^-;0,\lambda_i} = \frac{\langle \lambda_i \rangle}{hc} \cdot A_T \cdot (1-E_\lambda) T_{T,\lambda} QE_\lambda G_\lambda \cdot \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\pi R^2}{r^2} B_\lambda(T) d\lambda$$

Für die Anzahl erzeugter Elektronen von einer beliebig hellen Punktquelle resultiert letztendlich:

$$N^S_{e^-;m,\lambda_i} = N^S_{e^-;0,\lambda_i} \cdot 10^{-0,4 m^S_{\lambda_i}}$$

Abbildung eines punktförmigen Objektes

Die Beugung eines punktförmigen Sternes an der kreisrunden Objektivöffnung eines Teleskops wird durch die Point Spread Function (PSF) beschrieben.

$$I(x_0, y_0) \propto e^{-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2\sigma^2}}$$

Wobei zwischen der Standardabweichung σ und der Halbwertbreite $FWHM$ der folgende Zusammenhang besteht:

$$\sigma = \frac{FWHM}{2\sqrt{2\ln 2}} \approx \frac{FWHM}{2{,}3548}$$

Im Folgenden stellen wir uns vor, dass das Maximum des Sternabbildes genau auf die Mitte eines Pixels mit den Koordinaten $(x_0 = 0;\ y_0 = 0)$ trifft. Des Weiteren führen wir Polarkoordinaten ein. Die auf den Pixel auftreffende Lichtmenge, welche proportional zu dem Integral der PSF über die Pixelfläche ist, ergibt sich dann aus:

$$L(x_0 = 0, y = 0) \propto \int\limits_0^{y_p} \int\limits_0^{x_p} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} dxdy = \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{x_p/\sqrt{\pi}} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} drd\varphi$$
$$= \frac{\pi}{2}\sigma^2 \left(1 - e^{-\frac{x_p^2}{2\pi\sigma^2}}\right)$$

Der Anteil G_λ der Photonen, welche auf den zentralen Pixel treffen resultiert folglich aus:

$$G_\lambda = \frac{L(x_0,y_0)}{\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr d\varphi} = 1 - e^{-\frac{x_p^2}{2\pi\sigma^2}}$$

Himmelshintergrund

Zur Berechnung des SNR fehlen nunmehr nur noch die vom Himmelshintergrund empfangenen Photonen. Der Himmelshintergrund kann ebenfalls als Schwarzer Strahler angenommen werden, so dass sich die Elektronenerzeugungsrate in Analogie zur Punktquelle herleiten lässt. Es ist lediglich der Faktor G_λ durch die Pixelfläche x_p^2 zu ersetzen, da die Photonenintensität bei einem homogenen Flächenstrahler gleichmäßig verteilt auf die CCD auftrifft.

$$N^{bg}_{e^-;0,\lambda_i} = \frac{\langle \lambda_i \rangle}{hc} \cdot A_T \cdot (1 - E_\lambda) T_{T,\lambda} QE_\lambda \cdot x_p^2 \cdot \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\pi R^2}{r^2} B_\lambda(T) d\lambda$$

bzw.

$$N^{bg}_{e^-;m,\lambda_i} = N^{bg}_{e^-;0,\lambda_i} \cdot 10^{-0,4 m^{bg}_{\lambda_i}}$$

Ergebnis

Am Beispiel des visuellen Wellenlängenintervalls V [505nm, 595nm] wird der Einfluss der Parameter auf das Signal-Rausch-Verhältnis durch konkrete Berechnung dargelegt. Die Objektmagnitude, Himmelshintergrund, Extinktion und Transmission der Optik wird hierbei konstant gehalten und die übrigen Parameter variiert (Objekt 15mag; Himmelshintergrund (bg) 20mag; Extinktion 0,3; Transmission der Optik 0,7).
Die Resultate sind in Tabelle 1 aufgelistet. Ausgehend von der ersten Zeile der Tabelle wird jeweils immer nur ein Parameter geändert (fett & kursiv), um die Auswirkung zu eruieren. Folgende wesentliche Phänomene sind erwähnenswert:

- Mit den entscheidendsten Einfluss auf das SNR hat das Seeing. Bei Verdopplung des Seeings muss die Belichtungszeit um etwas mehr als den Faktor 4 verlängert werden, um das gleiche SNR zu erhalten.
- Das Öffnungsverhältnis der Optik ist nicht wie bei der analogen Fotografie alleine für die Belichtungsdauer verantwortlich. Bei der digitalen Fotografie muss das Öffnungsverhältnis immer zusammen mit der Pixelgröße des CCD-Chips betrachtet werden. So führt eine gleichzeitige Halbierung der Brennweite als auch der Pixelkantenlänge bei Beibehaltung der Teleskopöffnung zur keiner Veränderung des SNR.
- Große Teleskopöffnungen sind auch bei der Astrofotografie essentiell, falls Brennweite der Optik und Kantenlänge der CCD-Pixel zusammen auf das vorherrschende Seeing optimal abgestimmt sind. Bei Verdopplung der Teleskopöffnung steigt das SNR etwa um den Faktor zwei.
- Das Ausleserauschen und der Dunkelstrom der CCD haben bei der hier betrachteten Belichtungszeit, Objekt- und Himmelshintergrundhelligkeit keinen großen Einfluss auf das SNR. Die Quanteneffizienz des CCD hat hingegen wieder mehr Gewicht.

Optik				**CCD**					**SNR**
Öff-nung /[mm]	Obstruk-tion /[mm]	Brenn-weite /[mm]	See-ing /[“]	Belich-tungszeit / [s]	Pixel /[µm]	QE	dc /[e^-/s]	rn /[e^-]	
300	**70**	**2000**	**2**	**60**	**9**	**0,8**	**0,1**	**15**	**44,6**
300	70	2000	***4***	60	9	0,8	0,1	15	**19,8**
300	70	2000	***4***	***249***	9	0,8	0,1	15	**44,6**
300	70	***1000***	2	60	9	0,8	0,1	15	**80,1**
300	70	***1000***	2	60	***4,5***	0,8	0,1	15	**44,6**
600	***140***	***4000***	2	60	9	0,8	0,1	15	**46,4**
600	***140***	***4000***	2	60	***18***	0,8	0,1	15	**92,3**
300	70	2000	2	60	9	0,8	***0,05***	15	**44,6**
300	70	2000	2	60	9	0,8	0,1	***7,5***	**46,1**
300	70	2000	2	60	9	***0,4***	0,1	***15***	**30,3**

Tabelle 1

Des Weiteren kann mit dem SNR-Tool [1] auch die Effektivität von Schmalbandfiltern betrachtet werden. Am Beispiel eines Hα-Filters mit einer Bandbreite von 7nm sind die Resultate in Tabelle 2 zu finden. Die Werte der nicht variierten Parameter sind:
Seeing 4“; Extinktion 0,3; Optik: Öffnung 300mm; Obstruktion 70mm; Transmission 0,7; Brennweite 2000mm; CCD: QE 80%; dark current 0,1e^-/s; read noise 15e^-; Pixel 9µm; Belichtungszeit 300s. Zum Vergleich wurde ein L-Filter (400-700)nm und ein R-Filter (600-700)nm herangezogen.

Magnituden		**SNR**			**Wirksamkeit**	
Nebel /[mag]	bg /[mag]	L	R	Hα	Hα/L	Hα/R
15	**20**	**170,9**	**190,4**	**192,5**	**1,13**	**1,01**
20	20	**6,2**	**11,0**	**14,5**	**2,34**	**1,32**
22	20	**1,0**	**2,0**	**3,2**	**3,20**	**2,00**
20	***18***	**2,7**	**6,0**	**12,8**	**4,74**	**2,13**
20	***22***	**10,5**	**13,9**	**14,8**	**1,41**	**1,06**
22	***22***	**2,0**	**2,9**	**3,3**	**1,65**	**1,14**

Tabelle 2

Es zeigt sich, dass die Wirksamkeit von Schmalbandfiltern mit der Helligkeit des Objektes, bei konstantem Himmelshintergrund (bg), abnimmt. Ebenso reduziert sich der Nutzen mit dunkler werdendem Himmelshintergrund. Am meisten profitiert man von den Filtern bei einem hellen Stadthimmel.

---

[1] http:\\www.sternwarte.jorahm.de
[2] Ian S. McLean; Electronic Imaging in Astronomy, John Wiley & Sons, Chichester 1997, p 298
[3] Abriss der Astronomie, Wiley.VCH, Hans-Heinrich Voigt